
Multivariable Analysis an der DHBW weil ich durchgefallen bin (Scheiße)

Christoph J. Scherr

contact@cscherr.de

NewTec GmbH

2024-09-16

ABSTRACT

Notizen zu Vorlesungen und Lösungen von Aufgaben bezüglich multivariabler
Analysis and der DHBW Mannheim.

Keywords Undergrad · Analysis · Mathematics

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
2 Methoden	3
3 Vorlesungen	4
3.1 Basics & Outlook [1, Foliensatz 1]	4
3.1.1 Konvergenz von Folgen	4
3.1.2 Konvergenz von Reihen	5
3.1.3 Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen	10
3.1.4 Grenzwerte und Integration	12
3.2 Basics & Outlook [1, Foliensatz 2]	13
4 Übungen	14
4.1 Exercise Sheet 1 - Basics	14
4.1.1 Exercise 1 [2, 1, 1]	14
4.1.2 Exercise 2 [2, 1, 2]	16
4.1.3 Exercise 3 [2, 1, 3]	17
4.1.4 Exercise 4 [2, 1, 4]	19
4.1.5 Exercise 5 [2, 1, 5]	20
4.2 Exercise Sheet 2 - Introduction to Multivariable Functions	22
4.2.1 Exercise 1 [2, 2, 1]	22
4.2.2 Exercise 2 [2, 2, 2]	23
4.3 Exercise Sheet 3 - Topology of Metric Spaces	24
4.3.1 Exercise 1 [2, 3, 1]	24
4.3.2 Exercise 2 [2, 3, 2]	25
4.3.3 Exercise 3 [2, 3, 3]	26

4.3.4 Exercise 4 [2, 3, 4]	26
4.3.5 Exercise 4 [2, 3, 5]	26
4.4 Exercise Sheet 4 - Sequences, Limits & Continuity	27
4.4.1 Exercise 1 [2, 4, 1]	27
4.4.2 Exercise 2 [2, 4, 2]	28
4.4.3 Exercise 3 [2, 4, 3]	29
4.4.4 Exercise 4 [2, 4, 4]	30
4.4.5 Exercise 5 [2, 4, 5]	31
Bibliographie	32

Abbildungen

Abbildung (3.1): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Folgen	4
Abbildung (3.2): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Reihen	6
Abbildung (4.3): Zeichnung von $y = \sqrt{x^2 - 1}$	22
Abbildung (4.4): Zeichnung von $y = \sqrt{x^2 + 1}$	22

1 Einführung

Ich bin dieses Semester durch die verdammte Prüfung durchgefallen (fuck), also muss ich mir jetzt Zeit nehmen und üben und die Sache ernster nehmen. Ich brauchte einfach mehr Zeit. Dieses Dokument wird meine Notizen und Lösungen zu allen Vorlesungen und Übungen enthalten.

Dieses Dokument bezieht sich vor allem auf Vorlesung[1] und Übungen[2]. Diese sind auf Englisch.

2 Methoden

Erstmal machen und gucken dann.

3 Vorlesungen

3.1 Basics & Outlook [1, Foliensatz 1]

- Größtenteils Wiederholung von Analysis

3.1.1 Konvergenz von Folgen

1. Ist die Folge von einem bestimmten Typen?
 - Harmonische Reihe $(\frac{1}{n})$
 - Alternierende Reihe $((-1)^n)$
2. Hilft die Binomische Formel? $((a+b)(a-b))$ (heiß't glaub ich auch quadratische Ergänzung)
3. Sandwich Theorem $(a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow a \leq b \leq c)$
4. Gibt es einen Maximalwert?
5. Ist sie monoton: $(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \text{ oder } \geq 1)$

Abbildung (3.1): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Folgen

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 11]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \quad (3.1)$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{2n^3} \\ &= \frac{3}{2} \checkmark \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 13]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n \quad (3.3)$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \quad | : n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \checkmark
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 15]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \tag{3.5}$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n!}{n^n} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots}{n^n} \\
&\Rightarrow n! \leq n^{n-1} \\
&\Rightarrow a_n \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2 Konvergenz von Reihen

1. Addiert die Reihe eine Nullfolge?
2. Ist die Reihe von einem bestimmten Typen?
 - Geometrische Reihe
 - Teleskop-Reihe
3. Addiert die Reihe eine alternierende Folge?
4. Ratio test (Besonders bei $x!$ und x^n)
5. Root test (Besonders bei x^n)

Abbildung (3.2): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Reihen

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 22]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n-1} \tag{3.7}$$

converge?“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0 \tag{3.8}$$

⇒ Die Reihe konvergiert nicht, weil $\frac{2n-1}{3n-1}$ keine Nullfolge ist. ✓

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 26]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \quad (3.9)$$

converge?“

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n ; \frac{1}{3} > 1 \\ &\Rightarrow S \text{ ist eine geometrische Reihe!} \\ S &= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \checkmark \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 29]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (3.11)$$

converge?“

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1 + (n-n)}{n(n+1)} \\
&= \frac{(1+n) - n}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $a_n = \frac{1}{n} : b_n = a_n - a_{n+1} \Rightarrow$ Wir können das Teleskopkriterium anwenden

$$\begin{aligned}
&\left(S = a_0 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark \right) \\
&S = a_1 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark
\end{aligned}$$

Diese Partialbruchzerlegung hätte ich nicht ohne [3, Partialbruchzerlegung] gefunden. Aus irgendeinem Grund ist $a_0 = \frac{1}{1}$ in der Vorlesung[1], anstatt $\frac{1}{0}$. Demnach müsste z.B. $a_1 = \frac{1}{2}$ sein. Das n in a_n indiziert also eine Zahl aus \mathbb{N} und wird nicht direkt eingesetzt.

Ich finde das ist inkonsistent, deshalb verwende ich $a_1 \Rightarrow n = 1$, und $a_0 \Rightarrow n = 0$.

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 32]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (3.13)$$

converge?“

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n} \right| \cdot \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n} \right| \cdot \frac{1}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n} \right| \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \checkmark \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 35]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n} \quad (3.15)$$

converge?“

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{(n+1)^n} \right|} \quad (\text{Wurzelkriterium}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2}{n+1} \right)^n \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow S \text{ ist konvergent } \checkmark \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.3 Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow W \\ v \mapsto w &= f(v) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow W \\ v \mapsto w &= f(v) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Accumulation Point

„A value a is called accumulation point of D if there is a (non-constant) sequence a_n in D which converges to a .“ [1, 1, P. 40]

- Ist dann nicht jeder Punkt (in Mengen mit mehr als einem Element) ein Sammelpunkt? Folgen können doch beliebig definiert werden?

Uniform Continuity

„A function

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.19}$$

is called uniformly continuous on D if

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x, y \in V : |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.20}$$

“ [1, 1, P. 50]

1. Sieht erstmal irgendwie nichtssagend aus.
2. Wir wählen δ und ε implizit sehr klein, größere Werte sind möglich aber bringen uns nichts.
3. \Rightarrow Für jedes ε existiert ein δ dass die folgende Bedingung einhält: Wenn der Unterschied zwischen x und y sehr klein ist, dann ist der Unterschied der Funktionswerte für x und y auch sehr klein.
4. \Rightarrow Es ist überall stetig.

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 59]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} \quad (3.21)$$

“

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} = g(x) + h(g(x)) \\ g(x) &= \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x) \\ h(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow h'(x) = -x^{-2} \\ \Rightarrow f'(x) &= g'(x) + -g(x)^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \cos(x) + \frac{-1}{\sin(x)^2} \cdot \cos(x) \\ &= \left[1 - \frac{1}{\sin(x)^2} \right] \cdot \cos(x) \checkmark \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 61]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) \quad (3.23)$$

“

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) = g(h(x)) + h(g(x)) = u(x) \cdot v(x) \\ g(x) &= x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \\ h(x) &= \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x) \\ u(x) &= \cos(x)^2 = g(h(x)) \Rightarrow u'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2 \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \\ v(x) &= \cos(x^2) = h(g(x)) \Rightarrow v'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x \\ \Rightarrow f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2 \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot \cos(x^2) + \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x \\ &= 2 \cos(x) [-\sin(x) \cdot \cos(x^2) - x \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x^2))] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die original Lösung behauptet die Lösung wäre $f'(x) = 2 \cos(x) [\sin(x) \cos(x^2) + \cos(x)^2 \sin(x^2)x]$, das ist aber falsch, da die Vorzeichen, die beim Ableiten vom cos entstehen, fehlen.

3.1.4 Grenzwerte und Integration

Ex: Grenzwert mit l'Hôpital [1, 1, P. 69]

„Derive the limit

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (3.25)$$

“

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} \\ g(x) &= x^2 e^x \Rightarrow g'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2x e^x + x^2 e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x) \\ h(x) &= (e^x - 1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2(e^x - 1) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - 1) \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot (x^2 + 2x)}{2e^x \cdot (e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \checkmark \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ex: Integration mit Substitutionsverfahren [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx \quad (3.27)$$

using substitution“

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) \cdot e(u(x)) dx \\ u(x) &= \sin(x); u'(x) = \cos(x); e(x) = e^x; e'(x) = e^x \\ \Rightarrow A &= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} e(t) dt \\ &= \int_0^1 e(t) dt = e^1 - e^0 = e - 1 \checkmark \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ex: Integration mit partieller Integration [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int x \sin(x) dx \quad (3.29)$$

using partial integration“

$$\begin{aligned} A &= \int x \sin(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) \\ u(x) &= x; u'(x) = 1; v(x) = -\cos(x); v'(x) = \sin(x) \\ \Rightarrow A &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - (-\sin(x)) \\ &= \sin(x) - x \cos(x) \checkmark \end{aligned} \quad (3.30)$$

- Es ist sehr verwirrend für mich, wenn die Integrationsgrenzen fehlen ☹

An dieser Stelle stimmt die Lösung in [1] leider wieder nicht. Ich habe das Ergebnis wie in maschinell überprüfen lassen, und es war korrekt. Laut [1] wäre das Ergebnis:

$$A = \int x \sin(x) dx = x(-\cos(x)) - \int \sin(x) dx = \cos(x)(1-x) \times \quad (3.31)$$

3.2 Basics & Outlook [1, Foliensatz 2]

- Größtenteils Wiederholung von Analysis

4 Übungen

4.1 Exercise Sheet 1 - Basics

4.1.1 Exercise 1 [2, 1, 1]

Determine whether the following sequences converge. Calculate the limit in case of convergence.

$$(a) \quad a_n = \frac{2024(1+n+n^2)}{n(n+2023)} \quad (4.1)$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

$$(c) \quad a_n = \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad a_n &= \frac{2024(1+n+n^2)}{n(n+2023)} \\ &= \frac{\frac{2024(1+n+n^2)}{n^2}}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= (2024 \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2023}{n}}) \\ &= \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2024}{1} = 2024 \checkmark \end{aligned} \quad (4.4)$$

(b)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n)(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n)}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n^2 + n \cdot b_1 + b_2 - n^2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n \cdot b_1 + b_2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2}}{n} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} + 1 \\
&= \frac{b_1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{b_1}{2} \checkmark
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(c)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \\
&= \frac{(n^4 - 2)(n^3 + 1) + (n^3(3 - n^2))(n^2 + 4)}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{n^7 + n^4 - 2n^3 - 2 + 3n^5 + 12n^3 - n^7 - 4n^5}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{-n^5 + n^4 + 10n^3 - 2}{n^5 + n^2 + 4n^3 + 4} \\
&= \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1 \checkmark
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1.2 Exercise 2 [2, 1, 2]

Examine whether the following series converge or diverge.

$$(a) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad (4.7)$$

$$(b) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \\
 a_n &= \frac{2^n n!}{n^n} \text{ Ratio Test} \\
 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \right| \quad (4.9) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \\
 &= 2 \cdot e > 1 \Rightarrow a_n \text{ diverges } \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad a_n &= \frac{1}{n^n} \text{ Root Test} \\
 \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^n} \right|} &= \frac{1}{n} \rightarrow 0 < 1 \quad (4.10) \\
 &\Rightarrow a_n \text{ diverges } \checkmark
 \end{aligned}$$

4.1.3 Exercise 3 [2, 1, 3]

Determine the maximal domain of the following functions as a subset of \mathbb{R} and calculate their derivatives.

$$(a) \quad f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \quad (4.11)$$

$$(b) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \quad (4.12)$$

$$(a) \quad f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

$$e(x) = e^x \quad a(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad b(x) = 1+e^x$$

$$\ln : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad e : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

$$e'(x) = e(x) \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad b'(x) = e^x$$

$$a'(x) = \frac{b \cdot e' - b' \cdot e}{b^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

$$a'(x) = \frac{[1+e^x] \cdot e^x - e^x \cdot e^x}{[1+e^x]^2}$$

$$a'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{1+2e^x+e^{2x}} = \frac{e^x}{[1+e^x]^2} \quad (4.13)$$

$$f'(x) = \ln'(a(x)) \cdot a'(x)$$

$$= \frac{1}{\frac{e^x}{1+e^x}} \cdot \frac{e^x}{[1+e^x]^2}$$

$$= \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{[1+e^x]^2}$$

$$= \frac{1+e^x}{[1+e^x]^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^x} \checkmark$$

(b)

$$\begin{aligned}D_f &= \mathbb{R} \setminus \{x = 1\} \\f(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \\a(x) &= x+1 \quad b(x) = x-1 \quad c(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \quad d(x) = x^2 \\a'(x) &= 1 \quad b'(x) = 1 \quad d'(x) = 2x \\c'(x) &= \frac{b' \cdot a - b \cdot a'}{a^2} \\&= \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} \\&= \frac{-2}{(x-1)^2} \\f'(x) &= d'(c(x)) \cdot c'(x) \\&= 2 \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \\&= -4 \cdot \frac{x+1}{(x-1)^3} \checkmark\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.1.4 Exercise 4 [2, 1, 4]

Calculate the following integrals using substitution:

$$(a) \quad \int \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 3} dx \quad (4.15)$$

$$(b) \quad \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad A &= \int \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 3} dx \\ &= \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= \int \frac{1}{a(x)} \cdot a'(x) dx; \quad du = a'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln(u) = \ln(x^2 + 7x + 3) \checkmark \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} (b) \quad A &= \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \\ &= \int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int \cos(u) \cdot u' dx \\ &= \int \cos(u) \cdot du \\ &= \sin(u) \\ &= \sin(\ln(x)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.5 Exercise 5 [2, 1, 5]

Calculate the following integrals using partial integration:

$$(a) \quad \int (x+2) \cdot e^{2x} dx \quad (4.19)$$

$$(b) \quad \int x^2 \cdot \ln(x) dx \quad (4.20)$$

$$(a) \quad u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1; \quad v(x) = e^{2x} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v'(x) = e^{2x}$$

$$\begin{aligned} A &= \int (x+2) \cdot e^{2x} dx \\ &= \int x \cdot e^{2x} dx + \int 2 \cdot e^{2x} dx \\ &= \int x \cdot e^{2x} dx + 2 \cdot \int e^{2x} dx \\ &= \int x \cdot e^{2x} dx + 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \\ &= \int x \cdot e^{2x} dx + e^{2x} \\ &= \int u(x) \cdot v'(x) dx + e^{2x} \quad (4.21) \\ &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx + e^{2x} \\ &= x \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{2} - \int 1 \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{2} dx + e^{2x} \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - e^{2x} \frac{1}{4} + e^{2x} \\ &= e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right) \checkmark \end{aligned}$$

$$(b) \quad u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x; \quad v(x) = \ln(x) \cdot x - x^* \Rightarrow v'(x) = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} A &= \int x^2 \cdot \ln(x) dx \\ &= \int u(x) \cdot v'(x) dx \\ &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= [x^2 \cdot (\ln(x) \cdot x - x)] - \int 2x \cdot (\ln(x) \cdot x - x) dx \\ &= [x^2 \cdot (\ln(x) \cdot x - x)] - 2 \cdot \int x^2 \cdot (\ln(x) - 1) dx \\ &\Rightarrow ??? \end{aligned}$$

$$u'(x) = x^2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{3}x^3; \quad v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} A &= \int x^2 \cdot \ln(x) dx \\ &= \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 \left(\ln(x) - \frac{1}{9} \right) \checkmark \end{aligned}$$

*für Hochleitung $\ln(x)$ siehe [4]

4.2 Exercise Sheet 2 - Introduction to Multivariable Functions

4.2.1 Exercise 1 [2, 2, 1]

Consider the function

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Determine the levels sets at $c = 1$ and $c = -1$. What does it look like (sketch?)

For $c = 1$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned} \tag{4.24}$$

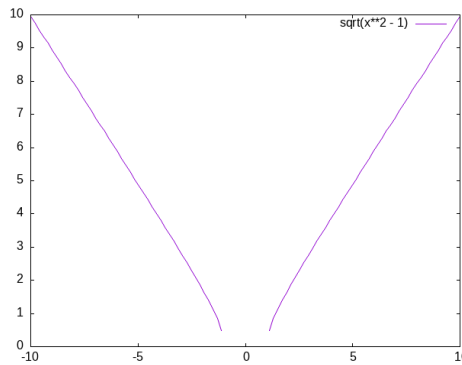


Abbildung (4.3): Zeichnung von $y = \sqrt{x^2 - 1}$

For $c = -1$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\stackrel{!}{=} -1 \\ \Rightarrow x^2 - y^2 = -1 &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned} \tag{4.25}$$

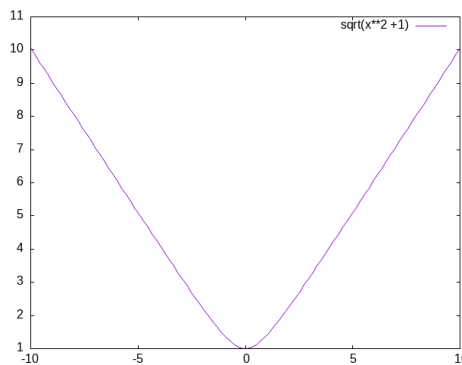


Abbildung (4.4): Zeichnung von $y = \sqrt{x^2 + 1}$

4.2.2 Exercise 2 [2, 2, 2]

Draw the following sets (what will be domains). Recall the lecture about curves.

$$(a) \quad D = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9\} \quad (4.26)$$

$$(b) \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 < y < \sqrt{x}\} \quad (4.27)$$

$$(a) \quad \begin{aligned} & (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \stackrel{!}{=} 9 \\ \Rightarrow & (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \\ & \Rightarrow y = \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.3 Exercise Sheet 3 - Topology of Metric Spaces

4.3.1 Exercise 1 [2, 3, 1]

Let (X, d) be a metric space, and let $x_1, \dots, x_4 \in X$. Show that

$$|d(x_1, x_2) - d(x_2, x_3)| \leq d(x_1, x_3) \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \text{z.z. } & |d(x_1, x_2) - d(x_2, x_3)| \leq d(x_1, x_3) \\ d(x_1, x_3) & \leq |d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)| \\ \Leftrightarrow 0 & \leq |d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)| - d(x_1, x_3) \\ \text{??} \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.3.2 Exercise 2 [2, 3, 2]

We define the metric

$$d(x, y) = \arctan(|x - y|) \quad (4.31)$$

on \mathbb{R} . Show that d indeed defines a metric, i. e. it satisfies the axioms of a metric.

Hint: You can and should use that

$$\arctan(x + y) \leq \arctan(x) + \arctan(y); x, y \in \mathbb{R} \quad (4.32)$$

(I) z.z. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \arctan(|x - y|) = 0 \\ &\Leftrightarrow |x - y| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \blacksquare \end{aligned} \quad (4.33)$$

(II) z.z. $d(x, y) = d(y, x)$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \arctan(|x - y|) \\ &= \arctan(|-1 \cdot (x - y)|) \\ &= \arctan(|y - x|) \\ &= d(y, x) \blacksquare \end{aligned} \quad (4.34)$$

(III) z.z. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

es gilt: $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$
 \arctan ist streng monoton steigend.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \arctan(|x - y|) \\ &= \arctan(|x - z + z - y|) \\ &\leq \arctan(|x - z| + |z - y|) \\ &= \arctan(|x - z|) + \arctan(|z - y|) \text{ Zauber} \\ &= d(x, z) + d(z, y) \blacksquare \end{aligned} \quad (4.35)$$

Somit gelten alle Eigenschaften einer Metrik für $d(x, y) = \arctan(|x - y|)$ ■.

4.3.3 Exercise 3 [2, 3, 3]

Show that the set $U = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ is neither open nor closed.

U ist nicht offen, weil es keinen offenen Ball um $x = 0$ mit radius $\varepsilon > 0$ geben kann, der vollständig in U liegt.

Damit U geschlossen ist, müsste $\mathbb{R} \setminus U$ offen sein. Man kann jedoch keinen offenen Ball um $x = 1; x \in \mathbb{R} \setminus U$ mit radius $\varepsilon > 0$ legen, sodass dieser vollständig in $\mathbb{R} \setminus U$ liegen würde. ■

4.3.4 Exercise 4 [2, 3, 4]

Show that the union

$$\mathfrak{m} = \bigcup U_i \quad (4.36)$$

of the sequence of open sets U is open.

[1, 3, Theorem 2.2] sagt das ist bereits wahr.

Trotzdem: Jedes x ist auf jeden fall teil mindestens eines U_i . Dann existiert ein offener Ball $B_{\varepsilon(x)} \subset U_i \subset \mathfrak{m}$ für alle $x \in U_i \subset \mathfrak{m}$. Somit ist \mathfrak{m} offen. ■

4.3.5 Exercise 4 [2, 3, 5]

Show that the intersection

$$\mathfrak{m} = \bigcap U_i \quad (4.37)$$

of the sequence of closed sets U is closed.

[1, 3, Theorem 2.2] sagt das ist bereits wahr.

Geschlossen bedeutet das Komplement ist offen. $\overline{\mathfrak{m}} = \overline{\bigcap U_i} = \bigcup \overline{U_i}$ Wie in Ex 4 gezeigt, ist $\overline{\mathfrak{m}}$ offen, da $\overline{U_i}$ offen ist, da U_i geschlossen ist. ■

4.4 Exercise Sheet 4 - Sequences, Limits & Continuity

4.4.1 Exercise 1 [2, 4, 1]

Is the sequence

$$a_m = \left(\frac{m}{m^2 + 2m - 8}, \frac{m^2 + 7}{(m + 1)(m - 1)} \right) \quad (4.38)$$

convergent or divergent? If it converges, determine its limit.

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{m}{m^2 + 2m - 8} \\ &= \frac{1}{m + 2 - \frac{8}{m}} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} b_m &= \frac{1}{m + 2 - \frac{8}{m}} = \frac{1}{m + 2} = 0 \\ c_m &= \frac{m^2 + 7}{(m + 1)(m - 1)} \\ &= \frac{m^2 + 7}{m^2 - 1} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} c_m &= \frac{m^2 + 7}{m^2 - 1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \Rightarrow a_m = (b_m, c_m) &\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = (0, 1) \checkmark \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.4.2 Exercise 2 [2, 4, 2]

Is the sequence

$$a_m = \left(\sqrt{m+10} - \sqrt{m}, \sqrt{m+\sqrt{m}} - \sqrt{m} \right) \quad (4.40)$$

convergent or divergent? If it converges, determine its limit.

$$\begin{aligned}
 b_m &= \sqrt{m+10} - \sqrt{m} \\
 &= \frac{(\sqrt{m+10} - \sqrt{m})(\sqrt{m+10} + \sqrt{m})}{\sqrt{m+10} + \sqrt{m}} \\
 &= \frac{m+10-m}{\sqrt{m+10} + \sqrt{m}} = \frac{10}{\sqrt{m+10} + \sqrt{m}} \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} b_m &= \frac{10}{\sqrt{m+10} + \sqrt{m}} = 0 \\
 c_m &= \sqrt{m+\sqrt{m}} - \sqrt{m} \\
 &= \frac{(\sqrt{m+\sqrt{m}} - \sqrt{m})(\sqrt{m+\sqrt{m}} + \sqrt{m})}{\sqrt{m+\sqrt{m}} + \sqrt{m}} \\
 &= \frac{m + \sqrt{m} - m}{\sqrt{m+\sqrt{m}} + \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+\sqrt{m}} + \sqrt{m}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{m+\sqrt{m}}}{\sqrt{m}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m+\sqrt{m}}{m}} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{m}}} + 1} \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} c_m &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{m}}} + 1} = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow a_m = (b_m, c_m) &\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left(0, \frac{1}{2} \right) \checkmark
 \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.4.3 Exercise 3 [2, 4, 3]

Investigate whether the real function

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} & \text{for } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \quad (4.42)$$

is continuous in $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} & \text{let } x = x_1; y = x_2 \\ f(x, y) &= \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ &= x^2 - y^2 \rightarrow 0 \text{ für } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ & \text{Überall stetig } \checkmark \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.4.4 Exercise 4 [2, 4, 4]

Investigate whether the real function

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{for } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \quad (4.44)$$

is continuous in $(0, 0)$. Hint: Use polar coordinates.

$$\begin{aligned} \text{let } x &= x_1; y = x_2 \\ x &= r \cos(\varphi); y = r \sin(\varphi) \\ f(x, y) &= \frac{r^3 \cos(\varphi)^3 + r^3 \sin(\varphi)^3}{x^2 + y^2} \\ &= r(\cos(\varphi)^3 + \sin(\varphi)^3) \\ \lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) &= r(\cos(\varphi)^3 + \sin(\varphi)^3) = 0 \checkmark \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.4.5 Exercise 5 [2, 4, 5]

Investigate whether the real function

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto e^{x-y^4} \cdot \sin\left(\frac{x - x^2y^3}{x^2 + 5}\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

is continuous on \mathbb{R} .

$x^2 + 5 = 0$ hat keine Lösung in \mathbb{R} . Die Funktion f ist stetig, weil sie stetige Funktionen auf stetige Weise kombiniert. (müsste die Funktionen zerlegen, aber kein Bock.) ✓

Bibliographie

- [1] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Vorlesung)“. 2024.
- [2] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Übungen)“. 2024.
- [3] „Mathe für Nicht-Freaks: Teleskopsumme und Teleskop“. Zugegriffen: 18. Juli 2024. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Teleskopsumme_und_Teleskopreihe
- [4] „Herleitung der Stammfunktion des natürlichen Logarithmus“. Zugegriffen: 9. September 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://matheguru.com/integralrechnung/herleitung-der-stammfunktion-des-natuerlichen-logarithmus.html>