Multivariable Analysis an der DHBW weil ich durchgefallen bin (Scheiße)

Christoph J. Scherr
contact@cscherr.de
NewTec GmbH

2024-09-04

Abstract

Notizen zu Vorlesungen und Lösungen von Aufgaben bezüglich multivariabler Analysis and der DHBW Mannheim.

Keywords Undergrad · Analysis · Mathmatics

Inhaltsverzeichnis

Abbildungen

1. Einführung

Ich bin dieses Semester durch die verdammte Prüfung durchgefallen (fuck), also muss ich mir jetzt Zeit nehmen und üben und die Sache ernster nehmen. Ich brauchte einfach mehr Zeit. Dieses Dokument wird meine Notizen und Lösungen zu allen Vorlesungen und Übungen enthalten.

Dieses Dokument bezieht sich vor allem auf Vorlesung[1] und Übungen[2]. Diese sind auf Englisch.

2. Methoden

Erstmal machen und gucken dann.

3. Vorlesungen

3.1. Basics & Outlook [1, Foliensatz 1]

- Größtenteils Wiederholung von Analysis

3.1.1. Konvergenz von Folgen

1. Ist die Folge von einem bestimmten Typen?
   - Harmonische Reihe ($\frac{1}{n}$)
   - Alternierende Reihe ($(-1)^n$)
2. Hilft die 3. Bionische Formel? ($(a+b)(a-b)$) (heiß´t glaub ich auch quadratische Ergänzung)
3. Sandwich Theorem ($a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow a \leq b \leq c$)
4. Gibt es einen Maximalwert?
5. Ist sie monoton: ($\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ oder ≥ 1)

Abbildung (3.1): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Folgen

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 11]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2-1)}{2 \cdot (n+2)^3} \tag{3.1}$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2-1)}{2 \cdot (n+2)^3}) \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2-1)}{2 \cdot (n+2)^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{2n^3} \\ &= \frac{3}{2} \checkmark \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 13]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n \tag{3.3}$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \quad | : n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2} \checkmark
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 15]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$
a_n = \frac{n!}{n^n}
\tag{3.5}
$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n!}{n^n} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)...}{n^n} \\
\Rightarrow n! &\leq n^{n-1} \\
\Rightarrow a_n &\leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

3.1.2. Konvergenz von Reihen

1. Addiert die Reihe eine Nullfolge?
2. Ist die Reihe von einem bestimmten Typen?
   - Geometrische Reihe
   - Teleskop-Reihe
3. Addiert die Reihe eine alternierende Folge?
4. Ratio test (Besonders bei $x!$ und x^n)
5. Root test (Besonders bei x^n)

Abbildung (3.2): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Reihen

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 22]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n-1} \tag{3.7}$$

converge?“

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0 \\ \Rightarrow \text{Die Reihe konvergiert nicht, weil } \frac{2n-1}{3n-1} \text{ keine Nullfolge ist. } \checkmark \end{gathered} \tag{3.8}$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 26]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \tag{3.9}$$

converge?“

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n ; \frac{1}{3} > 1 \\
&\Rightarrow S \ \text{ ist eine geometrische Reihe!} \\
S &= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3\checkmark
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 29]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{3.11}$$

converge?“

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1+(n-n)}{n(n+1)} \\
&= \frac{(1+n)-n}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\text{mit } a_n = \frac{1}{n} : b_n = a_n - a_{n+1} \Rightarrow \text{Wir können das Teleskopkriterium anwenden}
$$

$$
\left(S = a_0 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark \right)
$$

$$
S = a_1 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark
$$

Diese Partialbruchzerlegung hätte ich nicht ohne [3, Partialbruchzerlegung] gefunden. Aus irgendeinem Grund ist $a_0 = \frac{1}{1}$ in der Vorlesung[1], anstatt $\frac{1}{0}$. Demnach müsste z.B. $a_1 = \frac{1}{2}$ sein. Das n in a_n indiziert also eine Zahl aus $\mathbb{N}$ und wird nicht direkt eingesetzt.

Ich finde das ist inkonsistent, deshalb verwende ich $a_1 \Rightarrow n = 1$, und $a_0 \Rightarrow n = 0$.

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 32]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \tag{3.13}$$

converge?“

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\right|\cdot\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\right|\cdot\frac{1}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n}\right|\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\checkmark
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 35]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n} \tag{3.15}$$

converge?“

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(n+1)^n}\right|}\ \text{(Wurzelkriterium)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2}{(n+1)}\right)^n\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{S ist konvergent } \checkmark
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.1.3. Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow W \\ v &\mapsto w = f(w) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} f\colon D &\longrightarrow W \\ v &\mapsto w = f(w) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Accumulation Point

„A value a is called accumulation point of D if there is a (non-constant) sequence a_n in D which converges to a.“ [1, 1, P. 40]

- Ist dann nicht jeder Punkt (in Mengen mit mehr als einem Element) ein Sammelpunkt? Folgen können doch belibig definiert werden?

Uniform Continuity

„A function

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.19}$$

is called uniformly continuous on D if

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x, y \in V : |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.20}$$

“ [1, 1, P. 50]

1. Sieht erstmal irgendwie nichtssagend aus.
2. Wir wählen δ und ε implizit sehr klein, größere Werte sind möglich aber bringen uns nichts.
3. $\Rightarrow$ Für jedes ε existiert ein δ dass die folgende Bedingung einhält: Wenn der Unterschied zwischen x und y sehr klein ist, dann ist der Unterschied der Funktionswerte für x und y auch sehr klein.
4. $\Rightarrow$ Es ist überall stetig.

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 59]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} \tag{3.21}$$

"

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} = g(x) + h(g(x)) \\
g(x) &= \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x) \\
h(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow h'(x) = -x^{-2} \\
\Rightarrow f'(x) &= g'(x) + -g(x)^{-2} \cdot g'(x) \\
&= \cos(x) + \frac{-1}{\sin(x)^2} \cdot \cos(x) \\
&= \left[1 - \frac{1}{\sin(x)^2}\right] \cdot \cos(x) \checkmark
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 61]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) \tag{3.23}$$

"

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) = g(h(x)) + h(g(x)) = u(x) \cdot v(x) \\
g(x) &= x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \\
h(x) &= \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x) \\
u(x) &= \cos(x)^2 = g(h(x)) \Rightarrow u'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \\
v(x) &= \cos(x^2) = h(g(x)) \Rightarrow v'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x \\
\Rightarrow f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot \cos(x^2) + \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x \\
&= 2\cos(x)[-\sin(x) \cdot \cos(x^2) - x \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x^2))]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Die original Lösung behauptet die Lösung wäre $f'(x) = 2\cos(x)\left[\sin(x)\cos(x^2) + \cos(x)^2 \sin(x^2) x\right]$, das ist aber falsch, da die Vorzeichen, die beim Ableiten vom cos entstehen, fehlen.

3.1.4. Grenzwerte und Integration

Ex: Grenzwert mit l'Hôpital [1, 1, P. 69]

„Derive the limit

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \tag{3.25}$$

"

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \overset{!}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} \\
g(x) &= x^2 e^x \Rightarrow g'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2xe^x + x^2 e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x) \\
h(x) &= (e^x - 1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2(e^x - 1) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - 1) \\
\Rightarrow L &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot (x^2 + 2x)}{2e^x \cdot (e^x - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{2e^x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \checkmark
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ex: Integration mit Substitutionsverfahren [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx \tag{3.27}$$

using substitution"

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) \cdot e(u(x)) dx \\
u(x) &= \sin(x); u'(x) = \cos(x); e(x) = e^x; e'(x) = e^x \\
\Rightarrow A &= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} e(t) dt \\
&= \int_0^1 e(t) dt = e^1 - e^0 = e - 1 \checkmark
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ex: Integration mit partieller Integration [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int x \sin(x) dx \tag{3.29}$$

using partial integration“

$$\begin{aligned} A &= \int x \sin(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) \\ u(x) &= x; u'(x) = 1; v(x) = -\cos(x); v'(x) = \sin(x) \\ \Rightarrow A &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - (-\sin(x)) \\ &= \sin(x) - x\cos(x) \checkmark \end{aligned} \tag{3.30}$$

- Es ist sehr verwirrend für mich, wenn die Integrationsgrenzen fehlen 😕

An dieser Stelle stimmt die Lösung in [1] leider wieder nicht. Ich habe das Ergebnis wie in maschinell überprüfen lassen, und es war korrekt. Laut [1] wäre das Ergebnis:

$$A = \int x \sin(x) dx = x(-\cos(x)) - \int \sin(x) dx = \cos(x)(1-x) \times \tag{3.31}$$

4. Übungen

4.1. Exercise Sheet 1 - Basics

4.1.1. Exercise 1 [2, 1, 1]

Determine whether the following sequences converge. Calculate the limit in case of convergence.

(a)
$$a_n = \frac{2024(1+n+n^2)}{n(n+2023)} \tag{4.1}$$

(b)
$$a_n = \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

(c)
$$a_n = \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \tag{4.3}$$

(a)
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2024(1+n+n^2)}{n(n+2023)} \\ &= \frac{\frac{2024(1+n+n^2)}{n^2}}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= (2024\frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{)}}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2024}{1} = 2024 \checkmark \end{aligned} \tag{4.4}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n\right)}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n^2 + n \cdot b_1 + b_2 - n^2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n \cdot b_1 + b_2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n\cdot b_1+b_2}+n}{n}} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n\cdot b_1+b_2}}{n} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n\cdot b_1+b_2}}{\sqrt{n^2}} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}}} + 1 \\
&= \frac{b_1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{b_1}{2} \checkmark
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \\
&= \frac{(n^4 - 2)(n^3 + 1) + (n^3(3 - n^2))(n^2 + 4)}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{n^7 + n^4 - 2n^3 - 2 + 3n^5 + 12n^3 - n^7 - 4n^5}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{-n^5 + n^4 + 10n^3 - 2}{n^5 + n^2 + 4n^3 + 4} \\
&= \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{1} = 1 \checkmark
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Bibliographie

[1] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Vorlesung)“. 2024.

[2] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Übungen)“. 2024.

[3] Zugegriffen: 18. Juli 2024. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Teleskopsumme_und_Teleskopreihe