
Multivariable Analysis an der DHBW weil ich durchgefallen bin (Scheiße)

Christoph J. Scherr

contact@cscherr.de

NewTec GmbH

2024-09-09

ABSTRACT

Notizen zu Vorlesungen und Lösungen von Aufgaben bezüglich multivariableler
Analysis and der DHBW Mannheim.

Keywords Undergrad · Analysis · Mathematics

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	2
2. Methoden	2
3. Vorlesungen	3
3.1. Basics & Outlook [1, Foliensatz 1]	3
3.1.1. Konvergenz von Folgen	3
3.1.2. Konvergenz von Reihen	4
3.1.3. Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen	9
3.1.4. Grenzwerte und Integration	11
4. Übungen	13
4.1. Exercise Sheet 1 - Basics	13
4.1.1. Exercise 1 [2, 1, 1]	13
4.1.2. Exercise 2 [2, 1, 2]	15
4.1.3. Exercise 3 [2, 1, 3]	16
4.1.4. Exercise 4 [2, 1, 4]	18
4.1.5. Exercise 5 [2, 1, 5]	19
Bibliographie	21

Abbildungen

Abbildung (3.1): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Folgen	3
Abbildung (3.2): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Reihen	5

1. Einführung

Ich bin dieses Semester durch die verdammte Prüfung durchgefallen (fuck), also muss ich mir jetzt Zeit nehmen und üben und die Sache ernster nehmen. Ich brauchte einfach mehr Zeit. Dieses Dokument wird meine Notizen und Lösungen zu allen Vorlesungen und Übungen enthalten.

Dieses Dokument bezieht sich vor allem auf Vorlesung[1] und Übungen[2]. Diese sind auf Englisch.

2. Methoden

Erstmal machen und gucken dann.

3. Vorlesungen

3.1. Basics & Outlook [1, Foliensatz 1]

- Größtenteils Wiederholung von Analysis

3.1.1. Konvergenz von Folgen

1. Ist die Folge von einem bestimmten Typen?
 - Harmonische Reihe $(\frac{1}{n})$
 - Alternierende Reihe $((-1)^n)$
2. Hilft die 3. Bionische Formel? $((a+b)(a-b))$ (heiß't glaub ich auch quadratische Ergänzung)
3. Sandwich Theorem $(a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow a \leq b \leq c)$
4. Gibt es einen Maximalwert?
5. Ist sie monoton: $(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \text{ oder } \geq 1)$

Abbildung (3.1): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Folgen

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 11]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \quad (3.1)$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 3 \cdot n(n^2 - 1)}{2 \cdot (n+2)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{2n^3} \\ &= \frac{3}{2} \checkmark \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 13]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n \quad (3.3)$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \quad | : n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \checkmark
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ex: Convergence of Sequences [1, 1, P. 15]

„Does the sequence $a_n; n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \tag{3.5}$$

converge? If it converges, what is the limit?“

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n!}{n^n} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots}{n^n} \\
&\Rightarrow n! \leq n^{n-1} \\
&\Rightarrow a_n \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2. Konvergenz von Reihen

1. Addiert die Reihe eine Nullfolge?
2. Ist die Reihe von einem bestimmten Typen?
 - Geometrische Reihe
 - Teleskop-Reihe
3. Addiert die Reihe eine alternierende Folge?
4. Ratio test (Besonders bei $x!$ und x^n)
5. Root test (Besonders bei x^n)

Abbildung (3.2): Algorithmus zum Test auf Konvergenz bei Reihen

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 22]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n-1} \quad (3.7)$$

converge?“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad (3.8)$$

\Rightarrow Die Reihe konvergiert nicht, weil $\frac{2n-1}{3n-1}$ keine Nullfolge ist. ✓

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 26]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \quad (3.9)$$

converge?“

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n ; \frac{1}{3} < 1 \\ &\Rightarrow S \text{ ist eine geometrische Reihe!} \\ S &= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \checkmark \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 29]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (3.11)$$

converge?“

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
b_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1 + (n - n)}{n(n+1)} \\
&= \frac{(1 + n) - n}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $a_n = \frac{1}{n} : b_n = a_n - a_{n+1} \Rightarrow$ Wir können das Teleskopkriterium anwenden

$$\begin{aligned}
&\left(S = a_0 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark \right) \\
&S = a_1 = \frac{1}{1} = 1 \checkmark
\end{aligned}$$

Diese Partialbruchzerlegung hätte ich nicht ohne [3, Partialbruchzerlegung] gefunden. Aus irgendeinem Grund ist $a_0 = \frac{1}{1}$ in der Vorlesung[1], anstatt $\frac{1}{0}$. Demnach müsste z.B. $a_1 = \frac{1}{2}$ sein. Das n in a_n indiziert also eine Zahl aus \mathbb{N} und wird nicht direkt eingesetzt.

Ich finde das ist inkonsistent, deshalb verwende ich $a_1 \Rightarrow n = 1$, und $a_0 \Rightarrow n = 0$.

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 32]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (3.13)$$

converge?“

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n} \right| \cdot \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n} \right| \cdot \frac{1}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n} \right| \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \checkmark \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ex: Convergence of Serieses [1, 1, P. 35]

„Does the series

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n} \quad (3.15)$$

converge?“

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{(n+1)^n} \right|} \quad (\text{Wurzelkriterium}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2}{(n+1)} \right)^n \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow S \text{ ist konvergent } \checkmark \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.3. Funktionen, Stetigkeit, Ableitungen

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow W \\ v \mapsto w &= f(w) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow W \\ v \mapsto w &= f(w) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Accumulation Point

„A value a is called accumulation point of D if there is a (non-constant) sequence a_n in D which converges to a .“ [1, 1, P. 40]

- Ist dann nicht jeder Punkt (in Mengen mit mehr als einem Element) ein Sammelpunkt? Folgen können doch beliebig definiert werden?

Uniform Continuity

„A function

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.19}$$

is called uniformly continuous on D if

$$\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \forall x, y \in V : |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.20}$$

“ [1, 1, P. 50]

1. Sieht erstmal irgendwie nichtssagend aus.
2. Wir wählen δ und ε implizit sehr klein, größere Werte sind möglich aber bringen uns nichts.
3. \Rightarrow Für jedes ε existiert ein δ dass die folgende Bedingung einhält: Wenn der Unterschied zwischen x und y sehr klein ist, dann ist der Unterschied der Funktionswerte für x und y auch sehr klein.
4. \Rightarrow Es ist überall stetig.

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 59]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} \quad (3.21)$$

“

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} = g(x) + h(g(x)) \\ g(x) &= \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x) \\ h(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow h'(x) = -x^{-2} \\ \Rightarrow f'(x) &= g'(x) + -g(x)^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \cos(x) + \frac{-1}{\sin(x)^2} \cdot \cos(x) \\ &= \left[1 - \frac{1}{\sin(x)^2} \right] \cdot \cos(x) \checkmark \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ex: Ableitung einer Funktion mit nur einer Variablen [1, 1, P. 61]

„Calculate the derivative of

$$f(x) = \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) \quad (3.23)$$

“

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)^2 \cdot \cos(x^2) = g(h(x)) + h(g(x)) = u(x) \cdot v(x) \\ g(x) &= x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \\ h(x) &= \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x) \\ u(x) &= \cos(x)^2 = g(h(x)) \Rightarrow u'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \\ v(x) &= \cos(x^2) = h(g(x)) \Rightarrow v'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x \\ \Rightarrow f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) \cdot \cos(x^2) + \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x \\ &= 2\cos(x) [-\sin(x) \cdot \cos(x^2) - x \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x^2))] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die original Lösung behauptet die Lösung wäre $f'(x) = 2\cos(x) [\sin(x) \cos(x^2) + \cos(x)^2 \sin(x^2)x]$, das ist aber falsch, da die Vorzeichen, die beim Ableiten vom cos entstehen, fehlen.

3.1.4. Grenzwerte und Integration

Ex: Grenzwert mit l'Hôpital [1, 1, P. 69]

„Derive the limit

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (3.25)$$

“

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} \\ g(x) &= x^2 e^x \Rightarrow g'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2xe^x + x^2 e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x) \\ h(x) &= (e^x - 1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2(e^x - 1) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - 1) \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot (x^2 + 2x)}{2e^x \cdot (e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{2e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \checkmark \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ex: Integration mit Substitutionsverfahren [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx \quad (3.27)$$

using substitution“

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) \cdot e(u(x)) dx \\ u(x) &= \sin(x); u'(x) = \cos(x); e(x) = e^x; e'(x) = e^x \\ \Rightarrow A &= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} e(t) dt \\ &= \int_0^1 e(t) dt = e^1 - e^0 = e - 1 \checkmark \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ex: Integration mit partieller Integration [1, 1, P. 76]

„Calculate the integral

$$A = \int x \sin(x) dx \quad (3.29)$$

using partial integration“

$$\begin{aligned} A &= \int x \sin(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) \\ u(x) &= x; u'(x) = 1; v(x) = -\cos(x); v'(x) = \sin(x) \\ \Rightarrow A &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= x \cdot (-\cos(x)) - (-\sin(x)) \\ &= \sin(x) - x \cos(x) \checkmark \end{aligned} \quad (3.30)$$

- Es ist sehr verwirrend für mich, wenn die Integrationsgrenzen fehlen ☺

An dieser Stelle stimmt die Lösung in [1] leider wieder nicht. Ich habe das Ergebnis wie in maschinell überprüfen lassen, und es war korrekt. Laut [1] wäre das Ergebnis:

$$A = \int x \sin(x) dx = x(-\cos(x)) - \int \sin(x) dx = \cos(x)(1 - x) \times \quad (3.31)$$

4. Übungen

4.1. Exercise Sheet 1 - Basics

4.1.1. Exercise 1 [2, 1, 1]

Determine whether the following sequences converge. Calculate the limit in case of convergence.

$$(a) \quad a_n = \frac{2024(1 + n + n^2)}{n(n + 2023)} \quad (4.1)$$

$$(b) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

$$(c) \quad a_n = \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad a_n &= \frac{2024(1 + n + n^2)}{n(n + 2023)} \\ &= \frac{\frac{2024(1+n+n^2)}{n^2}}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= (2024 \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2023}{n}}) \\ &= \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2024}{n^2} + \frac{2024}{n} + 2024}{1 + \frac{2023}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2024}{1} = 2024 \checkmark \end{aligned} \quad (4.4)$$

(b)

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n; \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} - n)(\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n)}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n^2 + n \cdot b_1 + b_2 - n^2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{n \cdot b_1 + b_2}{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2} + n} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2}}{n} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2}}{n} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n \cdot b_1 + b_2}}{\sqrt{n^2}} + 1} \\
&= \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \frac{b_2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2}} + 1} + 1 \\
&= \frac{b_1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{b_1}{2} \checkmark
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(c)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^4 - 2}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1} \\
&= \frac{(n^4 - 2)(n^3 + 1) + (n^3(3 - n^2))(n^2 + 4)}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{n^7 + n^4 - 2n^3 - 2 + 3n^5 + 12n^3 - n^7 - 4n^5}{(n^2 + 4)(n^3 + 1)} \\
&= \frac{-n^5 + n^4 + 10n^3 - 2}{n^5 + n^2 + 4n^3 + 4} \\
&= \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{2}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^5}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{1} = -1 \checkmark
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1.2. Exercise 2 [2, 1, 2]

Examine whether the following series converge or diverge.

$$(a) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad (4.7)$$

$$(b) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \\
 a_n &= \frac{2^n n!}{n^n} \text{ Ratio Test} \\
 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \\
 &= 2 \cdot e > 1 \Rightarrow a_n \text{ diverges } \checkmark
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad a_n &= \frac{1}{n^n} \text{ Root Test} \\
 \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^n} \right|} &= \frac{1}{n} \rightarrow 0 < 1 \\
 &\Rightarrow a_n \text{ diverges } \checkmark
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.1.3. Exercise 3 [2, 1, 3]

Determine the maximal domain of the following functions as a subset of \mathbb{R} and calculate their derivatives.

$$(a) \quad f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \quad (4.11)$$

$$(b) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \\
 & e(x) = e^x \quad a(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad b(x) = 1+e^x \\
 & \ln : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad e : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \\
 & e'(x) = e(x) \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad b'(x) = e^x \\
 & a'(x) = \frac{b \cdot e' - b' \cdot e}{b^2} \quad \text{Quotientenregel} \\
 & a'(x) = \frac{[1+e^x] \cdot e^x - e^x \cdot e^x}{[1+e^x]^2} \\
 & a'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{1+2e^x+e^{2x}} = \frac{e^x}{[1+e^x]^2} \\
 & f'(x) = \ln'(a(x)) \cdot a'(x) \\
 & = \frac{1}{\frac{e^x}{1+e^x}} \cdot \frac{e^x}{[1+e^x]^2} \\
 & = \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{[1+e^x]^2} \\
 & = \frac{1+e^x}{[1+e^x]^2} \\
 & = \frac{1}{1+e^x} \checkmark
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

(b)

$$\begin{aligned}
D_f &= \mathbb{R} \setminus \{x = 1\} \\
f(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \\
a(x) &= x+1 \quad b(x) = x-1 \quad c(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \quad d(x) = x^2 \\
a'(x) &= 1 \quad b'(x) = 1 \quad d'(x) = 2x \\
c'(x) &= \frac{b' \cdot a - b \cdot a'}{a^2} \\
&= \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^2} \\
f'(x) &= d'(c(x)) \cdot c'(x) \\
&= 2 \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \\
&= -4 \cdot \frac{x+1}{(x-1)^3} \checkmark
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.1.4. Exercise 4 [2, 1, 4]

Calculate the following integrals using substitution:

$$(a) \quad \int \frac{2x+7}{x^2+7x+3} dx \quad (4.15)$$

$$(b) \quad \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad A &= \int \frac{2x+7}{x^2+7x+3} dx \\ &= \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= \int \frac{a'(x)}{a(x)} dx \\ &= \int \frac{1}{a(x)} \cdot a'(x) dx; \quad du = a'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln(u) = \ln(x^2+7x+3) \checkmark \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} (b) \quad A &= \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \\ &= \int \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int \cos(u) \cdot u' dx \\ &= \int \cos(u) \cdot du \\ &= \sin(u) \\ &= \sin(\ln(x)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.5. Exercise 5 [2, 1, 5]

Calculate the following integrals using partial integration:

$$(a) \quad \int (x+2) \cdot e^{2x} dx \quad (4.19)$$

$$(b) \quad \int x^2 \cdot \ln(x) dx \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1; \quad v(x) = e^{2x} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v'(x) = e^{2x} \\
 & A = \int (x+2) \cdot e^{2x} dx \\
 & = \int x \cdot e^{2x} dx + \int 2 \cdot e^{2x} dx \\
 & = \int x \cdot e^{2x} dx + 2 \cdot \int e^{2x} dx \\
 & = \int x \cdot e^{2x} dx + 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \\
 & = \int x \cdot e^{2x} dx + e^{2x} \\
 & = \int u(x) \cdot v'(x) dx + e^{2x} \quad (4.21) \\
 & = [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) dx + e^{2x} \\
 & = x \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{2} - \int 1 \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{2} dx + e^{2x} \\
 & = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - e^{2x} \frac{1}{4} + e^{2x} \\
 & = e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + 1 \right) \\
 & = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x - \frac{1}{2} + 2 \right) \\
 & = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right) \checkmark
 \end{aligned}$$

(b)

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x; \quad v(x) = \ln(x) \cdot x - x^* \Rightarrow v'(x) = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} A &= \int x^2 \cdot \ln(x) \, dx \\ &= \int u(x) \cdot v'(x) \, dx \\ &= [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx \\ &= [x^2 \cdot (\ln(x) \cdot x - x)] - \int 2x \cdot (\ln(x) \cdot x - x) \, dx \\ &= [x^2 \cdot (\ln(x) \cdot x - x)] - 2 \cdot \int x^2 \cdot (\ln(x) - 1) \, dx \\ &\Rightarrow ??? \end{aligned}$$

$$u'(x) = x^2 \Rightarrow u(x) = 3x^3 \cdot \frac{1}{3}; \quad v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} A &= \int x^2 \cdot \ln(x) \, dx \\ &= \int u'(x) \cdot v(x) \, dx \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 \left(\ln(x) - \frac{1}{9} \right) \checkmark \end{aligned}$$

*für Hochleitung $\ln(x)$ siehe [4]

Bibliographie

- [1] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Vorlesung)“. 2024.
- [2] D. N. Schreck, „Applied Mathematics - Multivariable analysis (Übungen)“. 2024.
- [3] „Mathe für Nicht-Freaks: Teleskopsumme und Teleskop“. Zugegriffen: 18. Juli 2024. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Teleskopsumme_und_Teleskopreihe
- [4] „Herleitung der Stammfunktion des natürlichen Logarithmus“. Zugegriffen: 9. September 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://matheguru.com/integralrechnung/herleitung-der-stammfunktion-des-natuerlichen-logarithmus.html>